

О ЛИПШИЦЕВОСТИ КОМПОЗИЦИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ДВУХСТУПЕНЧАТЫХ ГРУППАХ КАРНО

Мария Борисовна Карманова

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия

maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

Аннотация

Мы исследуем классы композиций, или цепочек, отображений двухступенчатых групп Карно и выводим в явном виде свойства отображений, гарантирующие липшицевость результирующей композиции. В частности, приведены соответствующие примеры, и рассмотрен важный случай, когда одно из отображений является проекцией.

Ключевые слова и фразы

липшицево отображение, внутренняя метрика, композиция отображений, двухступенчатая группа Карно.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0006).

Для цитирования

Карманова М.Б. О липшицевости композиций отображений на двухступенчатых группах Карно // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 4, С. 79-104. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-79-104

On Lipschitz Property of Mappings' Compositions on Two-Step Carnot Groups

Maria B. Karmanova

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia

maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

Abstract

We consider composition mappings, or chains, on two-step Carnot groups, and derive properties of mappings providing Lipschitz property of the resulting composition. In particular, we describe some examples, and consider an important case when one of the mappings is a projection.

Keywords

Lipschitz mapping, intrinsic metric, composition mapping, two-step Carnot group.

Funding

The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS (project FWNF-2022-0006).

For citation

Karmanova M. B. On Lipschitz Property of Mappings' Compositions on Two-Step Carnot Groups // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 4, P. 79-104. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-79-104

Введение

В данной работе мы исследуем классы композиций отображений групп Карно, липшицевых во внутреннем смысле. Композицией φ и ψ будем называть отображение ψ_φ , сопоставляющее каждой точке x области определения цепочку из двух точек, $\varphi(x)$ и $\psi_\varphi(x)$, конечный элемент которой — групповое произведение образов этой точки. Заметим, что так как на группах Карно операция произведения некоммутативна, то порядок отображений в композиции влияет на результат. Частным случаем композиции отображений является отображение-график, где первое отображение в цепочке — тождественное. Напомним, что в задачах классического анализа и его обобщений отображения-графики играют существенную роль. Например, классы минимальных и максимальных поверхностей локально представимы в виде графиков (см. подробности о таких поверхностях, связанных задачах и применениях в [1, 2, 3, 4] и цитируемых источниках). Кроме того, в начале XXI века была найдена связь задач нейробиологии о построении моделей визуализации и свойств минимальных поверхностей в субримановой геометрии [5, 6, 7]. Ряд работ посвящен исследованию свойств графиков с классическим способом построения и с согласованным с субримановой структурой (см., например, [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] и др.), при этом, не всегда метрические свойства в существующих работах представлены в явном виде. Проблема состоит в

том, что отображения-графики, построенные с использованием групповой операции, в общем случае не являются липшицевыми даже относительно внутренник (квази)метрик [16], и по этой причине к ним нельзя применить теорию ни классической дифференцируемости, ни субримановой. В данной ситуации вводятся либо дополнительные условия на отображения такие, как дополнительная дифференцируемость по классам переменных (см., например, [16, 17, 18]), либо новые структуры, и с их помощью строится описание метрических свойств образов отображений-графиков (см., например, [15]).

В статьях [19, 20] автором рассмотрены классы липшицевых отображений-графиков на группах Гейзенберга и двухступенчатых группах Карно, и впервые выведен критерий липшицевости отображения-графика. Именно, в явном виде установлены свойства отображения, обеспечивающие липшицевость построенного по нему графика. Данная работа содержит развитие исследований, начатых в [19, 20]. Мы будем рассматривать модельный случай, когда горизонтальные координатные функции отображения-графика непрерывно h -дифференцируемы. Подчеркнем, что и в общем, и в рассматриваемом случаях задача о композициях не сводится к исследованию отображений-графиков, так как отображение, заменяющее тождественное, может не быть взаимно-однозначным. В частности, одним из важных случаев таких отображений является проекция на объект меньшей размерности. Таким образом, постановка задачи является новой, а перспективы применения результатов будут выходить за рамки применений графиков. Результаты могут быть полезны при исследовании классов многозначных функций (соответствий на группах Карно), если для образа такого соответствия существует подходящая параметризация через группу Карно большей размерности.

§ 1. Двухступенчатые группы Карно и композиции отображений

Определение 1.1 ([21]). Двухступенчатая группа Карно — это связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представима в виде $V = V_1 \oplus V_2$, $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = \{0\}$.

Если базисное поле X_l принадлежит V_k , то его *степень* $\deg X_l$ равна k , $l = 1, \dots, N$, $k = 1, 2$. Здесь и далее N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Поля, степень которых равна единице, называются *горизонтальными*.

Подчеркнем, что базисные поля на группе Карно выбираются таким образом, что каждое из них принадлежит только одному из множеств V_1 или V_2 .

Обозначение 1.2. Обозначим символом $\dim V_k$ размерность V_k (в каждой точке), $k = 1, 2$.

Групповая операция определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа. Если $x = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j X_j\right)(0)$, $y = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(0)$, то

$$x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^N z_j X_j\right)(0),$$

где

$$\begin{cases} z_j = x_j + y_j & \text{для } \deg X_j = 1 \\ z_j = x_j + y_j + \sum_{\mu, \beta: \deg X_\mu = \deg X_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^j x_\mu y_\beta & \text{для } \deg X_j = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Значения $\{F_{\mu, \beta}^j\}_{j, \mu, \beta}$ называются *структурными константами* и не зависят от точек.

Отметим, что часто в исследованиях на неголономных структурах используют метрику Карно — Каратеодори (см., например, [22]). Однако, недостаток такой метрики состоит в том, что структура построенных по ней шаров в настоящее время известна только в нескольких частных случаях. По этой причине в качестве расстояния будем использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную метрике Карно — Каратеодори.

Определение 1.3 (см., например, [16]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Положим

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j: \deg X_j=1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=2} w_j^2\right)^{\frac{1}{4}}\right\}.$$

Из определения видно, что d_2 является субримановым обобщением евклидовой метрики. Из формул групповой операции (1) следует

Свойство 1.4. Величина $d_2(v, w)$ локально является квазиметрикой: она неотрицательна (и равна нулю тогда и только тогда, когда $v = w$), обладает свойством симметричности, и для всякой компактной окрестности $D \subset \mathbb{G}$ существует константа $C_D < \infty$ такая, что обобщенное неравенство треугольника

$$d_2(v, w) \leq C_D(d_2(v, u) + d_2(u, w))$$

верно для всех $v, u, w \in D$.

Обозначение 1.5. Шар в квазиметрике d_2 радиуса r с центром в точке u , равный $\{w \in \mathbb{G} : d_2(u, w) < r\}$, обозначим символом $\text{Box}_2(u, r)$.

Определение 1.6. Рассмотрим точку $u \in \mathbb{G}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (относительно $u \in \mathbb{G}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$. Координаты при горизонтальных полях будем называть *горизонтальными координатами*.

Из определения 1.3 вытекает

Свойство 1.7. Образ шара $\text{Box}_2(u, r)$ при отображении θ_u^{-1} совпадает с декартовым произведением двух (евклидовых) шаров, диаметры которых равны $2r$ и $2r^2$.

Рассмотрим теперь еще одну двухступенчатую группу Карно $\tilde{\mathbb{G}}$ с алгеброй Ли $\tilde{V} = \bigoplus_{k=1}^2 \tilde{V}_k$ и базисными полями $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$. Квазиметрику, построенную на $\tilde{\mathbb{G}}$ так же, как описано в определении 1.3, обозначим символом $\tilde{d}_2$.

Определение 1.8. Пусть $\tilde{\mathbb{G}}, \mathbb{G}$ — группы Карно, $E \subset \tilde{\mathbb{G}}$, и $\varphi : E \rightarrow \mathbb{G}$. Будем говорить, что отображение φ *липшицево во внутреннем смысле*, или *липшицево в субримановом смысле*, если существует константа $0 < L < \infty$ такая, что

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L \tilde{d}_2(x, y).$$

Основные задачи статьи будем решать при следующих условиях.

Предположение 1.9. Пусть $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ — двухступенчатые группы Карно с базисными полями $\{\tilde{X}_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ и $\{\hat{X}_k\}_{k=1}^{\hat{N}}$ соответственно и построенными, как в определении 1.3, квазиметриками $\tilde{d}_2$ и $\hat{d}_2$ соответственно. Будем предполагать, что они являются подмножествами двухступенчатой группы Карно $\mathbb{G}$ топологической размерности $N = \tilde{N} + \hat{N}$ со структурными константами $\{F_{\mu, \beta}^i\}_{i, \mu, \beta}$ и квазиметрикой d_2 . Пусть еще базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1}^N$ на $\mathbb{G}$ таковы, что, во-первых, $\dim V_k = \dim \tilde{V}_k + \dim \hat{V}_k$, $k = 1, 2$, и, во-вторых,

$$\begin{aligned} X_1|_{\tilde{\mathbb{G}}} &= \tilde{X}_1, \dots, X_{\dim \tilde{V}_1}|_{\tilde{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1}, \\ X_{\dim V_1+1}|_{\tilde{\mathbb{G}}} &= \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1+1}, \dots, X_{\dim V_1+\dim \tilde{V}_2}|_{\tilde{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_{\tilde{N}} \end{aligned} \quad (2)$$

и

$$X_{\dim \tilde{V}_1+1}|_{\hat{\mathbb{G}}} = \hat{X}_1, \dots, X_{\dim V_1}|_{\hat{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_{\dim \hat{V}_1},$$

$$X_{\dim V_1+\dim \hat{V}_2+1}|_{\hat{\mathbb{G}}} = \hat{X}_{\dim \hat{V}_1+1}, \dots, X_N|_{\hat{\mathbb{G}}} = \hat{X}_{\hat{N}}. \quad (3)$$

Предположим также, что $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ пересекаются в единице $\mathbf{0}$ группы $\mathbb{G}$. Будем точку этого пересечения считать в каждой группе за единицу (это всегда можно сделать посредством сдвигов). Заметим, что так как $\{X_i\}_{i=1}^N$ — базис, то в силу соотношений (2) и (3) элемент $\mathbf{0}$ является единственной точкой пересечения $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$. Действительно, наличие другой точки их пересечения противоречило бы линейной независимости набора $\{X_i\}_{i=1}^N$.

Пусть еще $\mathcal{G}$ — некоторая двухступенчатая группа Карно с базисными полями $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ топологической размерности $\mathcal{N}$, алгеброй Ли полей $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ и расстоянием ρ_2 , заданным, как в определении 1.3.

Определение 1.10. Пусть $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, где $\varphi(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \varphi_i(x) \tilde{X}_i\right)(\tilde{\mathbf{0}})$, а $\tilde{\mathbf{0}}$ — единица группы $\tilde{\mathbb{G}}$. Набор $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\tilde{N}}$ будем называть *координатными функциями отображения φ* .

Координатные функции при горизонтальных полях будем называть *горизонтальными координатными функциями*.

Перейдем к определению композиции отображений двухступенчатых групп Карно.

Определение 1.11. Рассмотрим отображения $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ и $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathbb{G}}$. Пусть

$$\varphi(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \varphi_i(x) \tilde{X}_i\right)(\tilde{\mathbf{0}})$$

и

$$\psi(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\hat{N}} \psi_j(x) \hat{X}_j\right)(\hat{\mathbf{0}}),$$

где $\tilde{\mathbf{0}}$ и $\hat{\mathbf{0}}$ — единицы групп $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ соответственно. Тогда композиция ψ_φ отображений φ и ψ определяется следующим образом:

$$\psi_\varphi(x) = \exp\left(\sum_{k=\dim \tilde{V}_1+1}^{\dim V_1} \psi_{k-\dim \tilde{V}_1}(x) X_k + \sum_{k=\dim V_1+\dim \tilde{V}_2+1}^N \psi_{k-\tilde{N}}(x) X_k\right)(\varphi(x)),$$

где

$$\varphi(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\dim \tilde{V}_1} \varphi_i(x) X_i + \sum_{i=\dim V_1+1}^{\dim V_1+\dim \tilde{V}_2} \varphi_{i-\dim \tilde{V}_1}(x) X_i\right)(\mathbf{0})$$

рассматривается, как элемент группы $\tilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{G}$.

Замечание 1.12. Если $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ и $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathbb{G}}$, то в силу некоммутативности полей на $\mathbb{G}$, в общем случае $\psi_\varphi \neq \varphi_\psi$.

Введем

Обозначение 1.13. Пусть $\{\varphi_x^k(y)\}_{k=1}^{\tilde{N}}$ — такие координаты, что

$$\varphi(y) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \varphi_x^k(y) \tilde{X}_k\right)(\varphi(x)), \quad (4)$$

а $\{\psi_x^k(y)\}_{k=1}^{\hat{N}}$ — такие координаты, что

$$\psi(y) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\hat{N}} \psi_x^k(y) \hat{X}_k\right)(\psi(x)). \quad (5)$$

Для вывода свойств отображений φ и ψ , гарантирующих липшицевость композиции ψ_φ , фиксируем $x \in \mathcal{G}$ и для произвольного y из окрестности точки x найдем такие $\{\xi_l(x, y)\}_{l=1}^N$, что

$$\psi_\varphi(y) = \left(\sum_{l=1}^N \xi_l(x, y) X_l\right)(\psi_\varphi(x)).$$

Для этого применим групповую операцию на $\mathbb{G}$. Из (1) вытекает следующее

Свойство 1.14. Верны следующие соотношения.

1. Если $l = 1, \dots, \dim \tilde{V}_1$, то $\xi_l(x, y) = \varphi_x^l(y)$.
2. Если $l = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \dim V_1$, то $\xi_l(x, y) = \psi_x^{l-\dim \tilde{V}_1}(y)$.
3. Если $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$, то

$$\begin{aligned} \xi_l(x, y) = \varphi_x^{l-\dim \tilde{V}_1}(y) - \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_x^{\mu-\dim \tilde{V}_1}(y) \\ - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x). \end{aligned} \quad (6)$$

4. Если $l = \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2 + 1, \dots, N$, то

$$\begin{aligned} \xi_l(x, y) = \psi_x^{l-\tilde{N}}(y) - \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_x^{\mu-\dim \tilde{V}_1}(y) \\ - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x). \quad (7) \end{aligned}$$

Далее будем рассматривать модельный случай, когда горизонтальные координатные функции композиции непрерывно hc -дифференцируемы.

Определение 1.15 ([22], см. также [23]). Функция $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ является hc -дифференцируемой в точке $x \in \mathcal{G}$, если существует отображение

$$\nabla_H f(x) : y = \exp\left(\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} y_k \mathcal{X}_k\right)(x) \mapsto f(x) + \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{V}_1} a_i(x) y_i = \nabla_H f(x) \langle y \rangle$$

такое, что $|f(y) - \nabla_H f(x) \langle y \rangle| = o(\rho_2(x, y))$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$.

Отображение $\nabla_H f(x)$ называется hc -дифференциалом, или горизонтальным градиентом функции f в точке x .

Из свойства 1.14 видно, что горизонтальные координатные функции композиции непрерывно hc -дифференцируемы тогда и только тогда, когда горизонтальные координатные функции отображений φ и ψ также непрерывно hc -дифференцируемы.

Замечание 1.16. В силу результатов [22, 23], липшицевы функции являются hc -дифференцируемыми почти всюду на области определения.

В свою очередь [23], функции, производные которых вдоль горизонтальных полей существуют всюду и непрерывны, являются непрерывно hc -дифференцируемыми всюду и локально липшицевыми.

§ 2. Необходимые и достаточные условия локальной липшицевости композиции

Для фиксированного $x \in \mathcal{G}$ введем вспомогательные точки.

Обозначение 2.1. Пусть $x \in \mathcal{G}$. Положим $y_H = \exp\left(\sum_{k=1}^{\dim \mathcal{V}_1} y_k \mathcal{X}_k\right)(x)$ и $y_T = \exp\left(\sum_{k=\dim \mathcal{V}_1+1}^{\mathcal{N}} y_k \mathcal{X}_k\right)(x)$.

Справедливо следующее утверждение о необходимых условиях локальной липшицевости композиции.

Теорема 2.2. Если композиция ψ_φ является локально липшицевой относительно ρ_2 и d_2 , где горизонтальные координатные функции φ и ψ непрерывно hc -дифференцируемы, то φ и ψ обладают следующими свойствами в каждой точке $x \in \mathcal{G}$.

1. Для $p = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \tilde{N}$ отображение $y_H \mapsto \varphi_x^p(y_H)$ дифференцируемо в классическом смысле в точке x , при этом, дифференциал равен

$$2 \sum_{\substack{\tau: \deg \hat{X}_\tau = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\tau + \dim \tilde{V}_1, \beta}^{p + \dim \tilde{V}_1} \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle \psi_\tau(x), \quad (8)$$

и он непрерывен по $x \in \mathcal{G}$.

2. Для $p = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \tilde{N}$ отображение $y_T \mapsto \varphi_x^p(y_T)$ является hc -дифференцируемым в точке x , и его hc -дифференциал равен нулю.
3. Для $q = \dim \hat{V}_1 + 1, \dots, \hat{N}$ отображение $y_H \mapsto \psi_x^q(y_H)$ дифференцируемо в классическом смысле в точке x , при этом, дифференциал равен

$$2 \sum_{\substack{\tau: \deg \hat{X}_\tau = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\tau + \dim \tilde{V}_1, \beta}^{q + \tilde{N}} \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle \psi_\tau(x), \quad (9)$$

и он непрерывен по $x \in \mathcal{G}$.

4. Для $q = \dim \hat{V}_1 + 1, \dots, \hat{N}$ отображение $y_T \mapsto \psi_x^q(y_T)$ является hc -дифференцируемым в точке x , и его hc -дифференциал равен нулю.

Доказательство. Пусть отображение ψ_φ локально липшицево, и горизонтальные координатные функции φ и ψ непрерывно hc -дифференцируемы. Исследуем свойства функций $\xi_l(x, y)$ для $l > \dim V_1$, где x и y принадлежат некоторой компактной окрестности. В этом случае $p = l - \dim \tilde{V}_1$, а $q = l - \tilde{N}$. Напомним, что если $l > \dim V_1$, то должно выполняться $|\xi_l(x, y)| \leq L(\rho_2(x, y))^2$ для некоторого постоянного $L < \infty$, зависящего только от компактной окрестности. Из предположений о непрерывной hc -дифференцируемости горизонтальных координатных функций следует их локальная липшицевость относительно ρ_2 и d_2 . Поэтому в (6) и (7) верно

$$\left| \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_x^{\mu - \dim \tilde{V}_1}(y) \right| < \hat{L}(\rho_2(x, y))^2,$$

где $\widehat{L} < \infty$ зависит от φ , ψ , $\mathbb{G}$ и рассматриваемой компактной окрестности.

Рассмотрим $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$ (случай $l > \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$ исследуется аналогично). Так как ψ_φ липшицево на рассматриваемой компактной окрестности, то верно

$$\left| \varphi_x^{l-\dim \tilde{V}_1}(y) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \tilde{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \right| < L(\rho_2(x, y))^2. \quad (10)$$

Для $y = \exp\left(\sum_{k=1}^N y_k \mathcal{X}_k\right)(x)$ рассмотрим вспомогательную точку y_H (см. обозначение 2.1). В силу (1) верно $y = \exp\left(\sum_{k=\dim V_1+1}^N y_k \mathcal{X}_k\right)(y_H)$. Для фиксированного $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$ распишем $\varphi_x^{l-\dim \tilde{V}_1}(y)$ и (10) в терминах $\{\varphi_x^i(y_H)\}_{i=1}^{\tilde{N}}$ и $\{\varphi_{y_H}^j(y)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$. Выводим

$$\varphi_x^{l-\dim \tilde{V}_1}(y) = \varphi_x^{l-\dim \tilde{V}_1}(y_H) + \varphi_{y_H}^{l-\dim \tilde{V}_1}(y) + \sum_{\substack{\alpha: \deg \tilde{X}_\alpha=1 \\ \lambda: \deg \tilde{X}_\lambda=1}} F_{\alpha,\lambda}^{l-\dim \tilde{V}_1} \varphi_x^\alpha(y_H) \varphi_{y_H}^\lambda(y).$$

Как и ранее, в силу предположений верно

$$\left| \sum_{\substack{\alpha: \deg \tilde{X}_\alpha=1 \\ \lambda: \deg \tilde{X}_\lambda=1}} F_{\alpha,\lambda}^{l-\dim \tilde{V}_1} \varphi_x^\alpha(y_H) \varphi_{y_H}^\lambda(y) \right| < \tilde{L} \rho_2(x, y),$$

где $\tilde{L} < \infty$ зависит от φ , $\mathbb{G}$ и рассматриваемой компактной окрестности. Так как при $\deg \tilde{X}_\beta = 1$ верно $\varphi_x^\beta(y) = \varphi_x^\beta(y_H) + \varphi_{y_H}^\beta(y)$, то из (10) вытекает

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_x^{l-\dim \tilde{V}_1}(y_H) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \tilde{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_x^\beta(y_H) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \right. \\ & \left. + \varphi_{y_H}^{l-\dim \tilde{V}_1}(y) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \tilde{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_{y_H}^\beta(y) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \right| < L(\rho_2(x, y))^2. \end{aligned} \quad (11)$$

По условию, горизонтальные координатные функции отображений φ и ψ непрерывно h -дифференцируемы. Тогда для β таких, что $\deg \tilde{X}_\beta = 1$, верно

$$\varphi_x^\beta(y_H) = \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle + o(\rho_2(x, y_H)) = \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle + o\left(\left(\sum_{i=1}^{\dim V_1} y_i^2\right)^{1/2}\right),$$

откуда следует, что при $y = y_H$ выполняется

$$\begin{aligned} & \varphi_x^{l-\dim \widehat{V}_1}(y_H) \\ &= 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu-\dim \widehat{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle \psi_{\mu-\dim \widehat{V}_1}(x) + o\left(\left(\sum_{i=1}^{\dim \mathcal{V}_1} y_i^2\right)^{1/2}\right), \end{aligned}$$

то есть, отображение $y_H \mapsto \varphi_x^{l-\dim \widehat{V}_1}(y_H)$ дифференцируемо в классическом смысле в точке x , при этом, дифференциал равен

$$2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu-\dim \widehat{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle \psi_{\mu-\dim \widehat{V}_1}(x),$$

и он непрерывен по $x \in \mathcal{G}$.

Рассмотрим теперь точку y_T (см. обозначение 2.1), которая соответствует случаю $x = y_H$. Тогда

$$\varphi_x^\beta(y_T) = 0 + o(\rho_2(x, y_T)) = o\left(\left(\sum_{i=\dim \mathcal{V}_1+1}^{\mathcal{N}} y_i^2\right)^{1/4}\right)$$

и, следовательно,

$$\left| \varphi_x^{l-\dim \widehat{V}_1}(y_T) - o\left(\left(\sum_{i=\dim \mathcal{V}_1+1}^{\mathcal{N}} y_i^2\right)^{1/4}\right) \right| < L \left(\sum_{i=\dim \mathcal{V}_1+1}^{\mathcal{N}} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Поэтому в (11)) верно

$$\left| \varphi_{y_H}^{l-\dim \widehat{V}_1}(y) - o\left(\left(\sum_{i=\dim \mathcal{V}_1+1}^{\mathcal{N}} y_i^2\right)^{1/4}\right) \right| < L \left(\sum_{i=\dim \mathcal{V}_1+1}^{\mathcal{N}} y_i^2\right)^{1/2}. \quad (12)$$

Иными словами, для y_T выводим, что отображение $y_T \mapsto \varphi_x^{l-\dim \widehat{V}_1}(y_T)$ является hc -дифференцируемым в точке x , и его hc -дифференциал равен нулю. Полагая $p = l - \dim \widehat{V}_1$ и $\tau = \mu - \dim \widehat{V}_1$, получаем утверждения пп 1 и 2.

Для $l = \dim V_1 + \dim \widetilde{V}_2 + 1, \dots, N$ рассуждения проводятся аналогично. Полагая $q = l - \widetilde{N}$ и $\tau = \mu - \dim \widetilde{V}_1$, получаем утверждения пп 3 и 4. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.3. Утверждение теоремы 2.2 справедливо и для случая, когда композиция ψ_φ является локально липшицевой относительно ρ_2 и d_2 , а непрерывно hc -дифференцируемыми являются только горизонтальные координатные функции с номерами $1, \dots, \dim \widetilde{V}_1$ (соответствующие отображению φ).

Прежде чем формулировать утверждение о достаточных условиях, введем

Обозначение 2.4. Если функция f является дифференцируемой в классическом смысле в точке x , то положим

$$\omega_f(x, y) = \frac{|f(y) - \nabla f(x)\langle y \rangle|}{\rho_{2,R}(x, y)}, \quad (13)$$

где

$$\rho_{2,R}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^N (y_i^2) \right)^{1/2}$$

для $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i \mathcal{X}_i\right)(x)$. Тогда $\omega_f(x, y) = o(1)$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$.

Если же функция f является h -дифференцируемой в точке x , то положим

$$\widehat{\omega}_f(x, y) = \frac{|f(y) - \nabla_H f(x)\langle y \rangle|}{\rho_2(x, y)}. \quad (14)$$

Тогда $\widehat{\omega}_f(x, y) = o(1)$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$.

Теорема 2.5. Пусть выполнены следующие условия.

1. Горизонтальные координатные функции отображений φ и ψ непрерывно h -дифференцируемы.
2. Для $p = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$ отображение $y_H \mapsto \varphi_x^p(y_H)$ дифференцируемо в классическом смысле в точке x , дифференциал равен (8) и он непрерывен по $x \in \mathcal{G}$, и, кроме того,

$$\left| \omega_{\varphi_x^p}(x, y_H) - 2 \sum_{\substack{\tau: \deg \widehat{X}_\tau=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\tau+\dim \widetilde{V}_1, \beta}^{p+\dim \widehat{V}_1} \widehat{\omega}_{\varphi_x^\beta}(x, y_H) \psi_\tau(x) \right| \leq L \rho_2(x, y_H)$$

для некоторой константы $L < \infty$, зависящей только от φ , ψ и компактной окрестности.

3. Для $p = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$ отображение $y_T \mapsto \varphi_x^p(y_T)$ является h -дифференцируемым в точке x , его h -дифференциал равен нулю, и, кроме того,

$$\left| \widehat{\omega}_{\varphi_x^p}(x, y_T) - 2 \sum_{\substack{\tau: \deg \widehat{X}_\tau=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\tau+\dim \widetilde{V}_1, \beta}^{p+\dim \widehat{V}_1} \widehat{\omega}_{\varphi_x^\beta}(x, y_T) \psi_\tau(x) \right| \leq L \rho_2(x, y_T)$$

для некоторой константы $L < \infty$, зависящей только от φ , ψ и компактной окрестности.

4. Для $q = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \widehat{N}$ отображение $y_H \mapsto \psi_x^q(y_H)$ дифференцируемо в классическом смысле в точке x , при этом, дифференциал равен (9) и он непрерывен по $x \in \mathcal{G}$, и, кроме того,

$$\left| \omega_{\psi_x^q}(x, y_H) - 2 \sum_{\substack{\tau: \deg \widehat{X}_\tau=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\tau+\dim \widetilde{V}_1, \beta}^{q+\widetilde{N}} \widehat{\omega}_{\varphi_x^\beta}(x, y_H) \psi_\tau(x) \right| \leq L \rho_2(x, y_H)$$

для некоторой константы $L < \infty$, зависящей только от φ , ψ и компактной окрестности.

5. Для $q = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \widehat{N}$ отображение $y_T \mapsto \psi_x^q(y_T)$ является h -дифференцируемым в точке x , и его h -дифференциал равен нулю, и, кроме того,

$$\left| \widehat{\omega}_{\psi_x^q}(x, y_T) - 2 \sum_{\substack{\tau: \deg \widehat{X}_\tau=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\tau+\dim \widetilde{V}_1, \beta}^{q+\widetilde{N}} \widehat{\omega}_{\varphi_x^\beta}(x, y_T) \psi_\tau(x) \right| \leq L \rho_2(x, y_T)$$

для некоторой константы $L < \infty$, зависящей только от φ , ψ и компактной окрестности.

Тогда композиция ψ_φ является локально липшицевой в субримановом смысле.

Доказательство. Утверждение для горизонтальных координатных функций следует из первого условия теоремы. Утверждение для координатных функций при полях степени два с номерами $\dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \widetilde{V}_2$ следует из соотношения (11) и выкладок, идущих до этого соотношения. Действительно, достаточно в левой части этого соотношения заменить координаты $\varphi(y)$, посчитанные относительно $\varphi(x)$, на их выражения в терминах дифференциалов (h -дифференциалов) и функций вида (13) (вида (14)) с учетом того, что $\rho_{2,R}(x, y_H) = \rho_2(x, y_H)$, а затем применить в обратном порядке выкладки, идущие выше.

Утверждение для координатных функций при полях степени два с номерами, строго большими, чем $\dim V_1 + \dim \widetilde{V}_2$, устанавливается аналогично. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.6. В отличие от отображений-графиков, которые являются частным случаем композиций, в общей постановке задачи возникает необходимость исследования поведения величин $o(1)$ из определений (субримановой) дифференцируемости.

§ 3. Частные случаи и примеры

Обсудим некоторые примеры, демонстрирующие работу результатов о необходимых и достаточных условиях.

Пример 3.1. Пусть φ — локально липшицево (в субримановом смысле) отображение, непрерывно дифференцируемое в классическом смысле дважды по горизонтальным переменным, такое, что для него и для некоторого локально липшицево и непрерывно дифференцируемого в классическом смысле дважды по горизонтальным переменным отображения ψ выполнены условия теоремы 2.2. Тогда первое и третье условия теоремы 2.2 являются достаточными для локальной липшицевости композиции ψ_φ . Если, дополнительно, оба отображения будут принадлежать классу C^1 по всем переменным, то композиция ψ_φ будет непрерывно hc -дифференцируемой.

Действительно, это следует из того, что все функции вида (13) и (14) будут оцениваться через $L\rho_2(x, y_H)$ и $L\rho_2(x, y_T)$, где $L < \infty$; таким образом, выполнены условия теоремы 2.5. Кроме того, будет верно

$$\left| \sum_{\substack{\mu: \deg \tilde{X}_{\mu-\dim \tilde{V}_1}=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\mu,\beta}^l \varphi_{y_H}^\beta(y) \psi_{\mu-\dim \tilde{V}_1}(x) \right| < L \left(\sum_{i=\dim V_1+1}^N y_i^2 \right)^{1/2} = L(\rho_2(x, y))^2,$$

а следующее из (11) для $x = y_H$ соотношение (12) примет вид

$$\left| \varphi_{y_H}^{l-\dim \hat{V}_1}(y) \right| < L \left(\sum_{i=\dim V_1+1}^N y_i^2 \right)^{1/2} = L(\rho_2(x, y))^2. \quad (15)$$

Далее остается применить теорему 2.5.

Замечание 3.2. В [20, Теорема 13, утверждение 3, формула (12)] соотношение (12) также имеет вид (15).

Подчеркнем, что свойство hc -дифференцируемости функций $\varphi_{y_H}^{l-\dim \hat{V}_1}(y)$, $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$, из (12) и функций $\psi_{y_H}^{l-\tilde{N}}(y)$ для $l = \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2, \dots, N$ и равенства нулю их hc -дифференциалов не противоречит классической дифференцируемости аналогичных функций для случая отображений-графиков в [24, Теорема 12, утверждение 3] с (в общем случае) ненулевым классическим дифференциалом.

Дело в том, что в левой части (12) и его следствий для частных случаев рассматривается модуль значений функций, которые принимают значения в $\mathbb{R}$, в первой степени, тогда как в правой части находится величина,

сравнимая с субримановым расстоянием между прообразами во второй степени. В свою очередь, это субриманово расстояние во второй степени для рассматриваемых точек совпадает с расстоянием, сравнимым с классическим (которое определяется значениями риманова тензора) в первой степени. Следовательно, относительно классического расстояния этот модуль не является настолько малым, насколько он мал относительно субриманова расстояния.

Аналогично, равенство нулю вышеупомянутых субримановых дифференциалов не противоречит тому, что классический дифференциал $D\varphi_u^T$ отображения φ_u^T из [24, Теорема 12] в общем случае нулю не равен.

Пример 3.3. Пусть в условиях теоремы 2.2 горизонтальные координатные функции φ линейны и зависят только от горизонтальных координат точки. Тогда условия 1–4 теоремы 2.2 являются не только необходимыми, но и достаточными для локальной липшицевости ψ_φ , если

$$\max\{|\widehat{\omega}_{\varphi_x^p}(x, y_T)|, |\widehat{\omega}_{\psi_x^q}(x, y_T)|\} < L\rho_2(x, y_T) \quad (16)$$

и

$$\max\{|\omega_{\varphi_x^p}(x, y_H)|, |\omega_{\psi_x^q}(x, y_H)|\} < L\rho_2(x, y_H) \quad (17)$$

для всех таких p и q , что $\deg \widetilde{X}_p = 2$ и $\deg \widehat{X}_q = 2$, а константа $L < \infty$ зависит только от φ , ψ и компактной окрестности.

Пример 3.4. Пусть в условиях теоремы 2.2 горизонтальные координатные функции φ линейны и зависят только от горизонтальных координат точки, а горизонтальные координатные функции ψ являются липшицевыми относительно ρ_2 и $\widehat{d}_2$. Тогда условия 1–4 теоремы 2.2 являются необходимыми и достаточными для глобальной липшицевости композиции ψ_φ , если (16) и (17) выполнены для всех таких p и q , что $\deg \widetilde{X}_p = 2$ и $\deg \widehat{X}_q = 2$, а константа $L < \infty$ зависит только от φ , ψ и $\mathbb{G}$.

Частным случаем примера 3.3 является композиция ψ_φ , где φ — горизонтальный гомоморфизм.

Пример 3.5. Пусть φ — горизонтальный гомоморфизм. Тогда для $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \widetilde{V}_2$ из (11) при $y = y_H$ следует

$$2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu - \dim \widetilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l \varphi_x^\beta(y_H) \psi_{\mu - \dim \widetilde{V}_1}(x) = 0, \quad (18)$$

так как $\varphi_x^{l - \dim \widehat{V}_1}(y_H) = 0$. Действительно, если положить

$$y_H^0 = \exp\left(\sum_{k=1}^{\dim \mathcal{V}_1} y_k \mathcal{X}_k\right)(0),$$

то $\varphi(y_H) = \varphi(x) \cdot \varphi(y_H^0)$ (см. (1)), откуда следует равенство нулю координат элемента $\varphi(y_H)$ относительно $\varphi(x)$ при полях второй степени. Кроме того, так как в общем случае $\varphi_x^\beta(y) = \varphi_x^\beta(y_H)$, то и

$$2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu - \dim \widetilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l \varphi_x^\beta(y) \psi_{\mu - \dim \widetilde{V}_1}(x) = 0$$

для всех $x, y \in \mathcal{G}$. В свою очередь, из (11) при $x = y_H$ следует соотношение

$$|\varphi_{y_H}^{l - \dim \widehat{V}_1}(y)| < L(\rho_2(x, y))^2,$$

так как $\varphi_{y_H}^\beta = 0$ при $\deg \widetilde{X}_\beta = 1$.

Пусть теперь $l > \dim V_1 + \dim \widetilde{V}_2$. Тогда из соотношения, аналогичного (11), построенного для координатных функций с этими номерами, вытекают следующие свойства.

1. Отображение $y_H \mapsto \psi_x^q(y_H)$ дифференцируемо в классическом смысле в точке x для $q = l - \widetilde{N}$, при этом, дифференциал равен

$$2 \sum_{\substack{\mu: \deg \widehat{X}_{\mu - \dim \widetilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l \varphi_x^\beta(y_H) \psi_{\mu - \dim \widetilde{V}_1}(x).$$

2. Отображение $y_T \mapsto \psi_x^q(y_T)$ липшицево в классическом смысле для $q = l - \widetilde{N}$.

Если горизонтальные координатные функции ψ липшицевы в субримановом смысле, то условия (18), перечисленные выше свойства 1 и 2, а также, выполнение (16) и (17) для $q = l - \widetilde{N}$, где константа $L < \infty$ зависит только от φ , ψ и $\mathbb{G}$, являются достаточными для глобальной липшицевости композиции $\psi \circ \varphi$.

Замечание 3.6. В отличие от [20], образ горизонтального гомоморфизма может иметь топологическую размерность, которая меньше размерности прообраза.

Тем не менее, можно построить еще один пример отображения ψ для случая, когда φ — горизонтальный гомоморфизм, используя методы построения [20, Пример 18]. Рассуждения для построения такого примера почти дословно повторяют [20, Пример 18] с очевидными изменениями, когда тождественное отображение меняется на горизонтальный гомоморфизм.

Рассмотрим случай, когда φ является проекцией, и $\mathcal{G} = \mathbb{G}$. Этот случай продемонстрирует принципиальную разницу между отображением-графиком и композицией.

Пример 3.7. Пусть $\mathcal{G} = \mathbb{G}$, а композиция ψ_φ является локально липшицевой относительно $\rho_2 = d_2$ и d_2 , где горизонтальные координатные функции ψ непрерывно h -дифференцируемы. Пусть еще $\varphi = \pi$ — проекция, сопоставляющая каждому $x = \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i X_i\right)(\mathbf{0})$ элемент

$$\pi(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\dim \tilde{V}_1} x_i X_i + \sum_{i=\dim V_1+1}^{\dim V_1+\dim \tilde{V}_2} x_i X_i\right)(\mathbf{0}) \in \tilde{\mathbb{G}}.$$

Фиксируем $x \in \mathbb{G}$ и распишем ключевое соотношение (11). Для этого вычислим элементы, входящие в (11).

Пусть $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$. Тогда $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N z_i X_i\right)(\mathbf{0})$, где $\{z_i\}_{i=1}^N$ вычислены таким же образом, как в (1). Заметим, что для элемента $y_H = \exp\left(\sum_{i=1}^{\dim V_1} y_i X_i\right)(x)$ его координаты относительно $\mathbf{0}$ при полях второй степени X_j отличаются от соответствующих координат y только на слагаемое y_j , $j = \dim V_1 + 1, \dots, N$.

Рассмотрим образ $\varphi(y_H)$. Для него верно

$$\varphi(y_H) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\dim \tilde{V}_1} (x_i + y_i) X_i + \sum_{j=\dim V_1+1}^{\dim V_1+\dim \tilde{V}_2} \left(x_j + \sum F_{\mu,\beta}^j x_\mu y_\beta\right) X_j\right)(\mathbf{0}),$$

где $\deg X_\mu = \deg X_\beta = 1$. Тогда

$$\varphi(y) = \exp\left(\sum_{j=\dim V_1+1}^{\dim V_1+\dim \tilde{V}_2} y_j X_j\right)(\varphi(y_H)),$$

поэтому $\varphi_{y_H}^{l-\dim \tilde{V}_1}(y) = y_l$ в (11), если $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$. Если же $\deg \tilde{X}_\beta = 1$, то $\varphi_{y_H}^\beta(y) = 0$.

Осталось вычислить координаты $\varphi(y_H)$ относительно $\varphi(x)$. По формулам (1), при полях первой степени коэффициент будет y_i , $i = 1, \dots, \dim \tilde{V}_1$, а при полях второй степени он будет равен

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu,\beta: \deg X_\mu = \deg X_\beta = 1} F_{\mu,\beta}^j x_\mu y_\beta - \sum_{\mu,\beta: \deg \tilde{X}_\mu = \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu,\beta}^j x_\mu (x_\beta + y_\beta) \\ &= \sum_{\mu,\beta: \deg X_\mu = \deg X_\beta = 1} F_{\mu,\beta}^j x_\mu y_\beta - \sum_{\mu,\beta: \deg \tilde{X}_\mu = \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu,\beta}^j x_\mu y_\beta, \quad (19) \end{aligned}$$

так как $\sum_{\mu, \beta: \deg \tilde{X}_\mu = \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^j x_\mu x_\beta = 0$. Так как $j = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$, то μ и β не могут одновременно быть больше, чем $\dim \tilde{V}_1$. Поэтому (19) совпадает со значением

$$\sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^j (x_\mu y_\beta - x_\beta y_\mu).$$

Следовательно, $\varphi_x^{l - \dim \tilde{V}_1}(y_H) = \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l (x_\mu y_\beta - x_\beta y_\mu)$ в соотношении (11), если $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$, тогда как $\varphi_x^\beta(y_H) = y_\beta$ для $\deg X_\beta = 1$. Возвращаясь к (11), выводим

$$\left| \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l (x_\mu y_\beta - x_\beta y_\mu) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l y_\beta \psi_{\mu - \dim \tilde{V}_1}(x) + y_l \right| \leq L(\rho_2(x, y))^2.$$

Так как $|y_l| \leq (\rho_2(x, y))^2$, то выводим

$$\left| \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l (x_\mu y_\beta - x_\beta y_\mu) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l y_\beta \psi_{\mu - \dim \tilde{V}_1}(x) \right| \leq L(\rho_2(x, y))^2.$$

Пусть $y = \exp(y_i X_i)(x)$, где $i = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \dim V_1$. Тогда должно выполняться

$$\sum_{\beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{i, \beta}^l x_\beta = 0 \quad (20)$$

для всех $x \in \mathbb{G} = \mathcal{G}$ и $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$. Аналогично, рассматривая $y = \exp(y_k X_k)(x)$, где $k = 1, \dots, \dim \tilde{V}_1$, выводим

$$\sum_{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1} F_{\mu, k}^l x_\mu = 2 \sum_{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1} F_{\mu, k}^l \psi_{\mu - \dim \tilde{V}_1}(x). \quad (21)$$

Таким образом, установлены необходимые условия (20) и (21) для $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$.

Рассмотрим теперь $l > \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$. Здесь верны все утверждения теоремы 2.2 за исключением того, что вместо (9) будет выражение

$$2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l y_\beta \psi_{\mu - \dim \tilde{V}_1}(x)$$

для данного l .

Кроме того, если ψ принадлежит классу C^2 в классическом смысле, то условия (20) и (21) для $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$ и условия 3 и 4 теоремы 2.2 являются достаточными для (локальной) липшицевости композиции $\psi_\varphi = \psi_\pi$. Действительно, так как $\varphi_{y_H}^\beta(y) = 0$, то если ψ принадлежит классу C^2 в классическом смысле, соотношение

$$\left| \psi_{y_H}^{l - \tilde{N}}(y) \right| \leq L(\rho_2(y_H, y))^2 < L(\rho_2(x, y))^2$$

будет выполняться всегда, и разность значения $\psi_x^q(y_H)$ с производной также не будет превосходить $L(\rho_2(x, y))^2$.

Пример 3.8. Рассмотрим ситуацию композиции некоторого отображения φ с тождественным, то есть, когда у графика переставлены тождественное отображение и отображение, по которому строится график. Иными словами, $\mathcal{G} = \hat{\mathcal{G}}$ и ψ тождественно. Пусть еще, как и ранее, горизонтальные координатные функции отображения φ непрерывно h -дифференцируемы.

Пусть $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$. Из (11) для $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_x^{l - \dim \hat{V}_1}(y_H) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l \varphi_x^\beta(y_H) x_{\mu - \dim \tilde{V}_1} \right. \\ & \left. + \varphi_{y_H}^{l - \dim \hat{V}_1}(y) - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l \varphi_{y_H}^\beta(y) x_{\mu - \dim \tilde{V}_1} \right| \leq L(\rho_2(x, y))^2. \end{aligned}$$

Если же $l = \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2 + 1, \dots, N$, то верно

$$\begin{aligned} & \left| 0 - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l \varphi_x^\beta(y_H) x_{\mu - \dim \tilde{V}_1} \right. \\ & \left. + y_{l - \tilde{N}} - 2 \sum_{\substack{\mu: \deg \hat{X}_{\mu - \dim \tilde{V}_1} = 1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1}} F_{\mu, \beta}^l \varphi_{y_H}^\beta(y) x_{\mu - \dim \tilde{V}_1} \right| \leq L(\rho_2(x, y))^2. \quad (22) \end{aligned}$$

Так как для рассматриваемого случая верно $|y_{l - \tilde{N}}| \leq (\rho_2(x, y))^2$, то

$$\left| \sum_{\mu = \dim \tilde{V}_1 + 1}^{\dim V_1} x_{\mu - \dim \tilde{V}_1} \sum_{\beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^l (\varphi_x^\beta(y_H) + \varphi_{y_H}^\beta(y)) \right| < L(\rho_2(x, y))^2, \quad (23)$$

и поэтому

$$\left| \sum_{\beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^l (\varphi_x^\beta(y_H) + \varphi_{y_H}^\beta(y)) \right| \leq L(\rho_2(x, y))^2 \quad (24)$$

для всех $l = \dim V_1 + \dim \tilde{V}_2 + 1, \dots, N$ и $\mu = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \dim V_1$.

Пусть $y = y_H$. Тогда, так как $(\rho_2(x, y))^2 = \sum_{i=1}^{\dim \hat{V}_1} y_i^2$, справедливо равенство

$$\sum_{\beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^l \varphi_x^\beta(y_H) = \sum_{\beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^l \varphi_\beta(y_H) - \sum_{\beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^l \varphi_\beta(x) = 0,$$

то есть, значение $\sum_{\beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^l \varphi_\beta(x)$ постоянно и не зависит от x (см., например, [20]; а также [21] о соединимости точек на группе Карно интегральными линиями горизонтальных базисных векторных полей).

Пусть теперь $y_H = x$. Из (24) с учетом $(\rho_2(x, y))^2 = \left(\sum_{i=\dim \hat{V}_1+1}^{\hat{N}} y_i^2 \right)^{1/2}$ выводим

$$\left| \sum_{\beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^l \varphi_x^\beta(y) \right| \leq L \left(\sum_{i=\dim \hat{V}_1+1}^{\hat{N}} y_i^2 \right)^{1/2}, \quad (25)$$

то есть, отображение η_x , равное

$$y_T = \exp \left(\sum_{i=\dim \hat{V}_1+1}^{\hat{N}} y_i \hat{X}_i \right) (x) \mapsto \sum_{\beta: \deg \tilde{X}_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^l \varphi_x^\beta(y_T) \quad (26)$$

липпицево в классическом смысле на множестве

$$\mathcal{G}_x = \{y : y = \exp\left(\sum_{i: \deg \mathcal{X}_i=2} y_i \mathcal{X}_i\right)(x)\} \quad (27)$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 2.2, полагая $p = l - \dim \widehat{V}_1$ для $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \widetilde{V}_2$ и $\tau = \mu - \dim \widetilde{V}_1$, выводим следующие необходимые условия липшицевости композиции.

1. Для $p = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$ отображение $y_H \mapsto \varphi_x^p(y_H)$ дифференцируемо в классическом смысле в точке x , при этом, дифференциал равен

$$2 \sum_{\substack{\tau: \deg \widehat{X}_\tau=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\tau+\dim \widetilde{V}_1, \beta}^{p+\dim \widehat{V}_1} \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle x_\tau, \quad (28)$$

и он непрерывен по $x \in \mathcal{G}$.

2. Для $p = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$ отображение $y_T \mapsto \varphi_x^p(y_T)$ является hc -дифференцируемым в точке x , и его hc -дифференциал равен нулю.

3. Если $l = \dim V_1 + \dim \widetilde{V}_2 + 1, \dots, N$, то значение $\sum_{\beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1} F_{\mu, \beta}^l \varphi_\beta(x)$

постоянно и не зависит от x для всех $\mu = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \dim V_1$, а отображение η_x , равное (26), липшицево в классическом смысле на множестве $\mathcal{G}_x$ (см. (27)) для всех $\mu = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \dim V_1$ и $x \in \mathcal{G}$.

Перейдем к описанию достаточных условий. Заметим, что выкладки (22)–(25) обратимы, поэтому для $l = \dim V_1 + \dim \widetilde{V}_2 + 1, \dots, N$ приведенное выше условие 3 будет достаточным. Далее, для $l = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim \widetilde{V}_2$ (и, соответственно, $p = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$) применимы все рассуждения доказательства теоремы 2.5, из которых вытекают следующие достаточные условия.

1. Для $p = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$ отображение $y_H \mapsto \varphi_x^p(y_H)$ дифференцируемо в классическом смысле в точке x , дифференциал равен

$$2 \sum_{\substack{\tau: \deg \widehat{X}_\tau=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\tau+\dim \widetilde{V}_1, \beta}^{p+\dim \widehat{V}_1} \nabla_H \varphi_\beta(x) \langle y_H \rangle x_\tau$$

и он непрерывен по $x \in \mathcal{G}$, и, кроме того,

$$\left| \omega_{\varphi_x^p}(x, y_H) - 2 \sum_{\substack{\tau: \deg \widehat{X}_\tau=1 \\ \beta: \deg \widetilde{X}_\beta=1}} F_{\tau+\dim \widetilde{V}_1, \beta}^{p+\dim \widehat{V}_1} \widehat{\omega}_{\varphi_\beta^p}(x, y_H) x_\tau \right| \leq L \rho_2(x, y_H)$$

для некоторой константы $L < \infty$, зависящей только от компактной окрестности.

2. Для $p = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \tilde{N}$ отображение $y_T \mapsto \varphi_x^p(y_T)$ является h -дифференцируемым в точке x , его h -дифференциал равен нулю, и, кроме того,

$$\left| \hat{\omega}_{\varphi_x^p}(x, y_T) - 2 \sum_{\substack{\tau: \deg \hat{X}_\tau=1 \\ \beta: \deg \tilde{X}_\beta=1}} F_{\tau+\dim \tilde{V}_1, \beta}^{p+\dim \hat{V}_1} \hat{\omega}_{\varphi_x^\beta}(x, y_T) x i_\tau \right| \leq L \rho_2(x, y_T)$$

для некоторой константы $L < \infty$, зависящей только от компактной окрестности.

Как видно из полученных условий, они существенно отличаются от таковых для отображений-графиков (ср. [19, 20]).

Список литературы

1. Миклюков В.М., Клячин А.А., Клячин В.А. *Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского*. Волгоград: ВолГУ, 2011.
2. Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т. *Минимальные поверхности и проблема Плато*. М.: Наука, 1987.
3. Тужилин А.А., Фоменко А.Т. *Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей*. М.: Наука, 1991.
4. Fomenko A.T. (ed.). *Minimal surfaces, Advances in Soviet mathematics*, 15. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.
5. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the rototranslation space // *Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica*. 2004. V.3. P.145–161.
6. Hladky R.K., Pauls S.D. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 2010. V.36, N 1. P.1–27.
7. Petitot J. *Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles*. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
8. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Regularity of non-characteristic minimal graphs in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // *Indiana Univ. Math. J.* 2009. V. 58, N 5. P. 2115–2160.

9. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Smoothness of Lipschitz intrinsic minimal graphs in Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, $n > 1$ // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 2010. V. 2010, N 648. P. 75–110.
10. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.M. A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing // *Amer. J. Math.* 2008. V. 130, N 2. P. 317–339.
11. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.M., Pauls S.D. Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // *J. Diff. Geom.* 2009. V. 81. P. 251–295.
12. Garofalo N., Pauls S.D. *The Bernstein problem in the Heisenberg group* (preprint). Purdue Univ., West Lafayette, Indiana, 2005. arXiv:math/0209065v2 [math.DG]
13. Barbieri D., Citti G. Regularity of minimal intrinsic graphs in 3-dimensional sub-Riemannian structures of step 2 // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 2011. V. 96, Issue 3. P. 279–306.
14. Julia A., Nicolussi Golo S., Vittone D. Area of intrinsic graphs and coarea formula in Carnot groups // *Math. Z.* 2022. V. 301. P. 1369–1406.
15. Corni F., Magnani V. Area of intrinsic graphs in homogeneous groups // 2023. Published online at arXiv:2311.06638v1 [math.MG]
16. Карманова М.Б. Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
17. Карманова М.Б. Формулы площади для классов гёльдеровых отображений групп Карно // *Сиб. матем. журн.* 2017. Т. 58, № 5. С. 1056–1079.
18. Карманова М.Б. Площадь графиков на произвольных группах Карно с сублоренцевой структурой // *Сиб. мат. журн.* 2020. Т. 61, N 4. С. 823–848.
19. Карманова М.Б. Липшицевы графики на группах Гейзенберга и связанные задачи // *Математические заметки*. 2025. Т. 118, № 1. С. 154–158.
20. Карманова М.Б. О липшицевых графиках на классах двухступенчатых групп Карно // *Сиб. мат. журн.* 2025. Т. 66, № 5. С. 901–919.

21. Folland G.B., Stein E.M. *Hardy spaces on homogeneous group*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
22. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // *Ann. Math.* 1989. V. 129. P. 1–60.
23. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings // *The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
24. Карманова М.Б. Метрические свойства отображений, задающих липшицевы графики на двухступенчатых группах Карно // *Сиб. мат. журн.* 2025. Т. 66, № 6. Принята к печати

References

1. Miklyukov V.M., Klyachin A.A., Klyachin V.A. *Maximal Surfaces in Minkowski Space-Time*. Volgograd: VolSU, 2011.
2. Dao Trong Thi, Fomenko A.T. *Minimal Surfaces, Stratified Multivarifolds and the Plateau Problem*. Translation of Mathematical Monographs, 84. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.
3. Fomenko A.T., Tuzhilin A.A. *Elements of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space*. Translation of Mathematical Monographs, 93. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.
4. Fomenko A.T. (ed.). *Minimal surfaces*. Advances in Soviet mathematics, 15. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.
5. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the rototranslation space // *Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica*. 2004. V. 3. P. 145–161.
6. Hladky R.K., Pauls S.D. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
7. Petitot J. *Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles*. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
8. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Regularity of non-characteristic minimal graphs in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // *Indiana Univ. Math. J.* 2009. V. 58, N 5. P. 2115–2160.

9. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Smoothness of Lipschitz intrinsic minimal graphs in Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, $n > 1$ // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 2010. V. 2010, N 648. P. 75–110.
10. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.M. A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing // *Amer. J. Math.* 2008. V. 130, N 2. P. 317–339.
11. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.M., Pauls S.D. Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // *J. Diff. Geom.* 2009. V. 81. P. 251–295.
12. Garofalo N., Pauls S.D. *The Bernstein problem in the Heisenberg group* (preprint). Purdue Univ., West Lafayette, Indiana, 2005.
arXiv:math/0209065v2 [math.DG]
13. Barbieri D., Citti G. Regularity of minimal intrinsic graphs in 3-dimensional sub-Riemannian structures of step 2 // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 2011. V. 96, Issue 3. P. 279–306.
14. Julia A., Nicolussi Golo S., Vittone D. Area of intrinsic graphs and coarea formula in Carnot groups // *Math. Z.* 2022. V. 301. P. 1369–1406.
15. Corni F., Magnani V. Area of intrinsic graphs in homogeneous groups // 2023. Published online at arXiv:2311.06638v1 [math.MG]
16. Karmanova M.B. The graphs of Lipschitz functions and minimal surfaces on Carnot groups // *Sib. Math. J.* 2012. V. 53, N 4. P. 672–690.
17. Karmanova M.B. Area formulas for classes of Hölder continuous mappings of Carnot groups // *Sib. Math. J.* 2017. V. 58, N 5. P. 817–836.
18. Karmanova M.B. The area of graphs on arbitrary Carnot groups with sub-Lorentzian structure // *Sib. Math. J.* 2020. T. 61, N 4. P. 648–670.
19. Karmanova M.B. Lipschitz graphs on Heisenberg groups and related problems // *Mathematical Notes*. 2025. V. 118, N 1. C. 205–211.
20. Karmanova M.B. Lipschitz graphs on classes of two-step Carnot groups // *Sib. Math. J.* 2025. V. 66, N 5.
21. Folland G.B., Stein E.M. *Hardy spaces on homogeneous group*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
22. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // *Ann. Math.* 1989. V. 129. P. 1–60.

23. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings // *The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
24. *Karmanova M.B.* Metric Properties of Mappings Defining Lipschitz Graphs on Two-Step Carnot Groups // *Sib. Math. J.* 2025. V. 66, N 6. Accepted

Информация об авторе

Мария Борисовна Карманова, доктор физико-математических наук,
SPIN 3371-8763 AuthorID: 156607
Scopus Author ID 8609942600
WoS ID: T-3468-2017

Author Information

Maria B. Karmanova, Doctor of Mathematics,
SPIN 3371-8763 AuthorID: 156607
Scopus Author ID 8609942600
WoS ID: T-3468-2017

*Статья поступила в редакцию 10.10.2025;
одобрена после рецензирования 31.10.2025; принята к публикации
05.11.2025*

*The article was submitted 10.10.2025;
approved after reviewing 31.10.2025; accepted for publication 05.11.2025*